数理解析研究所講究録
1040 巻 1998 年 220-227

対称性のよい Wavelet Filter 係数の計算

愛知工業大学・電子工学科　秦野和郎 (Kazuo Hatano)

1. はじめに.

Wavelet Filter 係数にはいくつかの種類があるがここでは次のような実数列の事とする. すなわち, K を自然数として, $2K$ 元の連立二次方程式,

$$\sum_{k=0}^{2K-1-2l} c_k c_{k+2l} = \frac{1}{2}\delta_{l,0} \quad , \quad \sum_{k=0}^{2K-1} (-1)^k k^l c_k = 0 \quad : 0 \le l \le K-1 \tag{1}$$

を満たす実数列, $c_k \ : 0 \le k \le 2K-1$ の事であるとする. ここで$\delta_{k,l}$ は Kronecker の delta である. この係数を使って,

$$\begin{cases} \phi(x) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{2K-1} c_k \phi(2x-k) \ , \ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-m)dx = \delta_{m,0} \ , \\ \psi(x) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{2K-1} \check{c}_k \phi(2x-k) \ , \ \check{c}_k = (-1)^k c_{2K-1-k} \ , \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\psi(x-m)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\psi(x-m)dx = \delta_{m,0} \ , \\ \displaystyle\int_0^{2K-1} x^l \psi(x)dx = 0 \ : 0 \le l \le K-1 \ , \\ \mathrm{supp}\ \phi(x) = \mathrm{supp}\ \psi(x) = [0, 2K-1] \end{cases} \tag{2}$$

となるような関数, $\phi(x)$, $\psi(x)$ を作ることが出来る. $\phi(x)$ を scaling function , $\psi(x)$ を mother wavelet function 等と言う. これらの関数を使って, $\phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k)$, $\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$ なる関数を作り, それらの線形結合を Wavelet 変換等に応用する. この際, $\phi(x)$ や $\psi(x)$ が対称に近い事が好まれる. そのためには, Filter 係数, c_k が対称に近い事, すなわち, ある整数 l に対して, $c_k = c_{2l-k}$ が近似的に満たされる事が要求される.

方程式, 式 (1) が唯一の解を持つなら問題はない. しかし, この方程式は, $K \ge 4$ のとき, $2^{[K/2]-1}$ 通りの解を持つ. 従って, ある目的に対して最良の Filter 係数はどれかが問題になる. 文献 [1] には $2 \le K \le 10$ に対して, Daubechies の判断で "最も対称性の悪い係数" と"最も対称性の良い係数" とが与えられている. 文献 [3] ではこれらをそれぞれ Daublets , Symmlets と呼んでいるのでここでもそれに従う. 文献 [1] に与えられている係数は公表されている係数で唯一のものであり, どの研究者もこれを使っている. しかし, これらの係数は倍精度で計算された数値であると思われるので, 与えられている 16 桁の数値の内, 末尾に相当な誤差を含んでいる. Daublets については筆者が $2 \le K \le 25$ に対して十分な桁数で計算し, 四倍精度の計算に耐える程度の数値を与えている [7]. 今回, Spectral Factorization と呼ばれる方法を使って, $2 \le K \le 70$ に対する Daublets , $2 \le K \le 40$ に対する Symmlets , $2 \le K \le 70$ に対する, 対称性に関して Symmlets と同程度の Filter

係数 (以下では Lasylets と呼ぶ) を計算した. Filter 係数の計算法にはいくつかの方法が考えられるが, 以下では筆者らが採用した三種の方法についてその概略を述べる.

2. Wavelet Filter 係数の計算法-その一.

式 (1) の, 第二式を,

$$\sum_{k=0}^{K-1}(-1)^k k^l c_k = -\sum_{k=K}^{2K-1}(-1)^k k^l c_k \quad : 0 \le l \le K-1 \tag{3}$$

と書き直すと, これは $c_k \ : 0 \le k \le K-1$ を未知数とする K 元の連立一次方程式である. これを解いて,

$$c_k = \sum_{l=0}^{K-1} \alpha_{k,l} c_{l+K} \quad : 0 \le k \le K-1 \tag{4}$$

の形にする. これを, 式 (1) の第一式に代入して, 式 (1) を

$$f_k = \sum_{j=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{j} \beta_{j,l}^{[k]} c_{j+K} c_{l+K} - \frac{1}{2}\delta_{k,0} = 0 \quad : 0 \le k \le K-1 \tag{5}$$

と書き直す. これは, $c_k \ : K \le k \le 2K-1$ を未知数とする K 元の連立二次方程式である. 従って Newton-Raphson 法により解くことが出来る. 得られた解を式 (4) に適用すればすべての, c_k を得る. 式 (5) で初期値, $\mathbf{c}^{(0)} = (c_K^{(0)}, c_{K+1}^{(0)}, \cdots, c_{2K-1}^{(0)})^T$ を適切に与えれば特別な予備知識なしに Wavelet Filter 係数を計算できる.

この方法により Daublets を計算することが出来る. しかし, Symmlets の計算は, この方法では難しい. 適切な初期値を与えることは不可能と言ってよい.

3. Wavelet Filter 係数の計算法-その二.

この方法は, 式 (1) から上とは別の形の K 元の連立二次方程式を導く. scaling 関数について成り立つ関係式,

$$\phi(x) = 2\sum_{k=0}^{2K-1} c_k \phi(2x-k) \tag{6}$$

の両辺に Fourier 変換

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \tag{7}$$

を適用すると,

$$\hat{\phi}(\xi) = \sum_{k=0}^{2K-1} c_k e^{-i\frac{\xi}{2}k}\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \tag{8}$$

となる. ここで

$$m_0(\xi) = \sum_{k=0}^{2K-1} c_k e^{-ik\xi} \tag{9}$$

とおくと

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0(\frac{\xi}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \tag{10}$$

となる. 式 (1) の第二式から,

$$m_0^{(l)}(\pi) = (-i)^l \sum_{k=0}^{2K-1} (-1)^k k^l c_k = 0 \quad : \; 0 \le l \le K-1 \tag{11}$$

となるので, $m_0(\xi)$ は

$$m_0(\xi) = \Big(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\Big)^K \Lambda(\xi) \quad , \quad \Lambda(\xi) = \sum_{j=0}^{K-1} \lambda_j e^{-ij\xi} \tag{12}$$

の形になる筈である. ここで λ_j を未知数とする K 元の連立二次方程式を導く事を考える. scaling 関数の, 整数移動に関する直交性,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-m)dx = \delta_{m,0} \tag{13}$$

を使うと,

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \equiv 1 \tag{14}$$

を得る [1]. ここで $|\Lambda(\xi)|^2$ は, 式 (12) から,

$$\begin{aligned} |\Lambda(\xi)|^2 &= \Big(\sum_{j=0}^{K-1} \lambda_j \cos j\xi\Big)^2 + \Big(\sum_{j=0}^{K-1} \lambda_j \sin j\xi\Big)^2 = \sum_{j=0}^{K-1}\sum_{k=0}^{K-1} \lambda_j\lambda_k \cos(j-k)\xi \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \lambda_j^2 + 2\sum_{k=1}^{K-1}\Big(\sum_{j=0}^{K-1-k} \lambda_j\lambda_{j+k}\Big)\cos k\xi \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} S_k(\cos\xi)^k = \sum_{k=0}^{K-1} S_k\big(1-2\sin^2\frac{\xi}{2}\big)^k = P\big(\sin^2\frac{\xi}{2}\big) \end{aligned} \tag{15}$$

の形になる. 上式で $P(y)$ は y に関する $K-1$ 次の多項式である.

$$|\Lambda(\xi+\pi)|^2 = P\big(\cos^2\frac{\xi}{2}\big) \quad , \quad \frac{1+e^{-i\xi}}{2} = \cos\frac{\xi}{2}\cdot e^{-i\frac{\xi}{2}} \tag{16}$$

等を使うと, 式 (14),(12) から

$$\big(\cos^2\frac{\xi}{2}\big)^K P\big(\sin^2\frac{\xi}{2}\big) + \big(\sin^2\frac{\xi}{2}\big)^K P\big(\cos^2\frac{\xi}{2}\big) \equiv 1 \tag{17}$$

を得る.

$$(1-y)^K P(y) + y^K P(1-y) \equiv 1 \tag{18}$$

の解は

$$P(y)=\sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}y^k \tag{19}$$

で与えられる [1]. この関係を使って $|\Lambda(\xi)|^2$ を $\cos k\xi$ の, 式 (15) とは別の形の線形結合で表す. すなわち,

$$\begin{aligned}\check{P}_K(\xi)&=\frac{1}{2}|\Lambda(\xi)|^2=\frac{1}{2}P\bigl(\sin^2\frac{\xi}{2}\bigr)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}\bigl(\sin^2\frac{\xi}{2}\bigr)^k\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}\bigl(\frac{1-\cos\xi}{2}\bigr)^k=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{K-1}A_k\cos k\xi\end{aligned} \tag{20}$$

の形にする. 上式を満たす, $A_k\ :\ 0\le k\le K-1$ は三角関数に関する適当な公式を使って計算する事が出来る. 式 (15),(20) から

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{K-1}\lambda_j^2+\sum_{k=1}^{K-1}\Bigl(\sum_{j=0}^{K-1-k}\lambda_j\lambda_{j+k}\Bigr)\cos k\xi=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{K-1}A_k\cos k\xi \tag{21}$$

を得る事が出来る. この式から, K 元の連立二次方程式,

$$\sum_{j=0}^{K-1}\lambda_j^2=A_0\quad,\quad\sum_{j=0}^{K-1-k}\lambda_j\lambda_{j+k}=A_k\ :\ 1\le k\le K-1 \tag{22}$$

を得る. これを **Newton-Raphson** 法で解いて, 式 (12) を適用すれば **Wavelet Filter** 係数を得ることが出来る. しかし初期値をどのように与えれば良いかの問題は残る. 文献 [1] の **p.196** に **Daublets** に対する $\lambda_j\ :0\le j\le K-1$ の値が $2\le K\le 10$ について与えられている (一部に誤りがある).

4. Wavelet Filter 係数の計算法-その三.

この方法は **Spectral Factorization** と呼ばれる計算法であり, 式 (9) で与えられる $m_0(\xi)$ を $z=e^{-i\xi}$ に関して徹底的に因数分解する. 上で得られた結果から,

$$m_0(\xi)=\sum_{k=0}^{2K-1}c_ke^{-ik\xi}=\Bigl(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\Bigr)^K\Lambda(\xi) \tag{23}$$

で,

$$|\Lambda(\xi)|^2=A_0+2\sum_{k=1}^{K-1}A_k\cos k\xi=A_0+\sum_{k=1}^{K-1}A_k(e^{-ik\xi}+e^{ik\xi}) \tag{24}$$

である. $z=e^{-i\xi}$ とおき, $|\Lambda(\xi)|^2=\Theta_K(z)$ とおくと,

$$\Theta_K(z)=A_0+\sum_{k=1}^{K-1}A_k\bigl(z^k+\frac{1}{z^k}\bigr) \tag{25}$$

となる．従って，

$$\check{\Theta}_K(z) = z^{K-1}\Theta_K(z) = 0 \tag{26}$$

は $2K-2$ 次の実係数代数方程式である．式 (25) から分かるように，この方程式が実根 r_l を持つなら，r_l^{-1} も根である．又，z_j なる複素根を持つなら，z_j^{-1} ，$\bar{z}_j$ ，$\bar{z}_j^{-1}$ も根である．従って，$\check{\Theta}_K(z)$ は

$$\check{\Theta}_K(z) = A_{K-1}\Big[\prod_{l=1}^{I}(z-r_l)(z-r_l^{-1})\Big]\cdot\Big[\prod_{j=1}^{J}(z-z_j)(z-\bar{z}_j)(z-z_j^{-1})(z-\bar{z}_j^{-1})\Big] \tag{27}$$

の形に因数分解される．ここで，$I+2J=K-1$ である．又，

$$A_{K-1} = \frac{(-1)^{K-1}}{4^{K-1}}\binom{2K-2}{K-1} \tag{28}$$

である．次に，$z=e^{-i\xi}$ すなわち複素平面の単位円周上において，

$$|(e^{-i\xi}-r_l)(e^{-i\xi}-r_l^{-1})| = |-r_l^{-1}e^{-i\xi}(e^{-i\xi}-r_l)(e^{i\xi}-r_l)| = |r_l|^{-1}|e^{-i\xi}-r_l|^2 \tag{29}$$

及び，

$$|(e^{-i\xi}-z_j)(e^{-i\xi}-\bar{z}_j^{-1})| = |z_j|^{-1}|(e^{-i\xi}-z_j)(\bar{z}_j-e^{i\xi})| = |z_j|^{-1}|e^{-i\xi}-z_j|^2 \tag{30}$$

である．この事と，$|\Lambda(\xi)|^2$ が正の実関数である事から，

$$\begin{aligned}|\Lambda(\xi)|^2 &= |\check{\Theta}_k(e^{-i\xi})| \\ &= \Big[|A_{K-1}|\prod_{l=1}^{I}|r_l|^{-1}\prod_{j=1}^{J}|z_j|^{-2}\Big]\cdot\Big|\prod_{l=1}^{I}(e^{-i\xi}-r_l)\prod_{j=1}^{J}(e^{-i\xi}-z_j)(e^{-i\xi}-\bar{z}_j)\Big|^2\end{aligned} \tag{31}$$

となる．このようにして，

$$\Lambda(\xi) = \Big[|A_{K-1}|\prod_{l=1}^{I}|r_l|^{-1}\prod_{j=1}^{J}|z_j|^{-2}\Big]^{1/2}\cdot\prod_{l=1}^{I}(e^{-i\xi}-r_l)\prod_{j=1}^{J}(e^{-2i\xi}-2e^{-i\xi}\Re z_j+|z_j|^2) \tag{32}$$

を得る．

結局，$m_0(\xi)$ は次の形に因数分解される．すなわち，

$$\begin{aligned}m_0(\xi) &= \sum_{k=0}^{2K-1}c_k e^{-ik\xi} = \Big(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\Big)^K\Lambda(\xi) \\ &= \Big(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\Big)^K\Big[|A_{K-1}|\prod_{l=1}^{I}|\check{r}_l|^{-1}\prod_{j=1}^{J}|\check{z}_j|^{-2}\Big]^{1/2} \\ &\quad\times\prod_{l=1}^{I}(e^{-i\xi}-\check{r}_l)\prod_{j=1}^{J}(e^{-2i\xi}-2e^{-i\xi}\Re\check{z}_j+|\check{z}_j|^2)\end{aligned} \tag{33}$$

となる. ここで $\check{r}_l$, $\check{z}_j$ は $2K-2$ 次の代数方程式,

$$z^{K-1}\Theta_K(z) = z^{K-1}\Big[A_0 + \sum_{k=1}^{K-1} A_k\big(z^k + \frac{1}{z^k}\big)\Big] = 0 \tag{34}$$

の根である. $2 \leq K \leq 70$ について計算した限りでは, n を自然数として,

$$\begin{cases} K = 4n \quad のとき\ I = 1\ ,\ J = 2n-1 \ , \\ K = 4n+1\ のとき\ I = 0\ ,\ J = 2n \ , \\ K = 4n+2\ のとき\ I = 1\ ,\ J = 2n \ , \\ K = 4n+3\ のとき\ I = 0\ ,\ J = 2n+1 \end{cases} \tag{35}$$

である. 以下では, $r_1 > 1$ とし, $\Im z_j > 0$, $|z_j| > 1$ とする. すなわち, r_l , z_j は複素平面上における, 単位円の外でしかも第一象限にあるとする. $r_1 \neq |z_j|$, $|z_k| \neq |z_j|$: $j \neq k$ である. z_j の番号付けを, $|z_1| > |z_2| > \cdots > |z_{J-1}| > |z_J|$ とする. このようにすると, $r_1 > |z_1| > \cdots > |z_J|$ であり, $0 = \arg r_1 < \arg z_1 < \arg z_2 < \cdots < \arg z_J < \pi/2$ である.

ここで, $m_0(\xi)$ の絶対値 $|m_0(\xi)|$ 及び, 偏角

$$\arg m_0(\xi) = \arctan\Big(\frac{\Im m_0(\xi)}{\Re m_0(\xi)}\Big) \tag{36}$$

を吟味する. 対称性から, $0 \leq \xi \leq \pi$ における吟味で十分である.

$$\Big(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\Big)^K = \Big(\cos\frac{\xi}{2}\cdot e^{-i\frac{\xi}{2}}\Big)^K \tag{37}$$

であるから,

$$\Big|\Big(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\Big)^K\Big| = \Big(\cos\frac{\xi}{2}\Big)^K \quad , \quad \arg\Big(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\Big)^K = -\frac{K\xi}{2} \tag{38}$$

である. 次に, $e^{-i\xi} - \check{r}_l = e^{-i\xi/2}(e^{-i\xi/2} - \check{r}_l e^{i\xi/2})$ であるから,

$$\begin{cases} |e^{-i\xi} - \check{r}_l| = (1 + \check{r}_l^2 - 2\check{r}_l e^{i\xi/2})^{1/2} \ , \\ \arg(e^{-i\xi} - \check{r}_l) = \Phi(\check{r}_l, \xi) = -\dfrac{\xi}{2} + \bar{\Phi}(\check{r}_l, \xi) \ , \\ \bar{\Phi}(\check{r}_l, \xi) = \arctan\Big(\dfrac{\check{r}_l + 1}{\check{r}_l - 1}\tan\dfrac{\xi}{2}\Big) \end{cases} \tag{39}$$

である. 更に, $e^{-2i\xi} - 2e^{-i\xi}\Re\check{z}_j + |\check{z}_j|^2 = e^{-i\xi}(e^{-i\xi} - 2\Re\check{z}_j + e^{i\xi}|\check{z}_j|^2)$ であるから,

$$\begin{cases} |e^{-2i\xi} - 2e^{-i\xi}\Re\check{z}_j + |\check{z}_j|^2| = [\{(|\check{z}_j|^2+1)\cos\xi - 2\Re\check{z}_j\}^2 \\ \qquad\qquad + \{(|\check{z}_j|^2-1)\sin\xi\}^2]^{1/2} \ , \\ \arg(e^{-2i\xi} - 2e^{-i\xi}\Re\check{z}_j + |\check{z}_j|^2) = \Psi(\check{z}_j, \xi) = -\xi + \bar{\Psi}(\check{z}_j, \xi) \ , \\ \bar{\Psi}(\check{z}_j, \xi) = \arctan\dfrac{(|\check{z}_j|^2-1)\sin\xi}{(|\check{z}_j|^2+1)\cos\xi - 2\Re\check{z}_j} \end{cases} \tag{40}$$

となる. $\Phi(\check{r}_l,\xi)$, $\Psi(\check{z}_j,\xi)$ は ξ に関する連続関数であるとして, $\bar{\Phi}(\check{r}_l,0)=0$. $\bar{\Psi}(\check{z}_j,0)=0$ であるとする. 偏角の非線形成分をそれぞれ, $\hat{\Phi}(\check{r}_l,\xi)$, $\hat{\Psi}(\check{z}_j,\xi)$ とすると,

$$\hat{\Phi}(\check{r}_l,\xi)=\bar{\Phi}(\check{r}_l,\xi)-\frac{\xi}{\pi}\bar{\Phi}(\check{r}_l,\pi) \quad , \quad \hat{\Psi}(\check{z}_j,\xi)=\bar{\Psi}(\check{z}_j,\xi)-\frac{\xi}{\pi}\bar{\Psi}(\check{z}_j,\pi) \tag{41}$$

である. 以上から, $m_0(\xi)$ の絶対値, $|m_0(\xi)|$ は,

$$|m_0(\xi)|=\left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^K\left[|A_{K-1}|\prod_{l=1}^{I}|\check{r}_l|^{-1}\prod_{j=1}^{J}|\check{z}_j|^{-2}\right]^{1/2}$$
$$\times\prod_{l=1}^{I}(1+\check{r}_l^2-2\check{r}_l\cos\xi)^{1/2}\cdot\prod_{j=1}^{J}[\{(|\check{z}_j|^2+1)\cos\xi-2\Re\check{z}_j\}^2+\{(|\check{z}_j|^2-1)\sin\xi\}^2]^{1/2} \tag{42}$$

で与えられ, 偏角は

$$\arg m_0(\xi)=-\frac{2K-1}{2}\xi+\sum_{l=1}^{I}\arctan\left(\frac{\check{r}_l+1}{\check{r}_l-1}\tan\frac{\xi}{2}\right)+\sum_{j=1}^{J}\arctan\frac{(|\check{z}_j|^2-1)\sin\xi}{(|\check{z}_j|^2+1)\cos\xi-2\Re\check{z}_j} \tag{43}$$

で与えられる.

$\check{r}_l=r_l$ とおいても $\check{r}_l=r_l^{-1}$ とおいても $|m_0(\xi)|$ は変わらない. しかし $\arg m_0(\xi)$ についてはそうではない. $\check{z}_j=z_j$ とするか $\check{z}_j=z_j^{-1}$ とするかによっても同じである.

$\check{r}_l=r_l \ :1\le l\le I$, $\check{z}_j=z_j \ :1\le j\le J$ として得られる Filter 係数, $c_k \ :0\le k\le 2K-1$ は Daublets[3] と呼ばれ, 最も対称性の悪い Filter 係数であるが, 最初に見いだされた有限長の Filter 係数であり最もよく使われている. 今回, $2\le K\le 70$ について十分な桁数の値を計算した.

偏角の非線形成分

$$Nl[\arg m_0(\xi)]=\sum_{l=1}^{I}\hat{\Phi}(\check{r}_l,\xi)+\sum_{j=1}^{J}\hat{\Psi}(\check{z}_j,\xi) \tag{44}$$

の絶対値が最小となるように, $\check{r}_l$, $\check{z}_j$ を選択して得られる Filter 係数, $c_k \ :0\le k\le 2K-1$ は Symmlets[3](=the least asymmetric Filters[1]) と呼ばれ, 最も対称性が良いとされている. 位相線形に近い Filter とも呼ばれる. 異なる Filter 係数を与える $\check{r}_l$, $\check{z}_j$ の組み合わせは $2^{[K/2]-1}$ 通りあるので K が大きくなると組み合わせを決めるのに膨大な計算量が必要になる. 今回, $4\le K\le 40$ について十分な桁数の値を計算した.

今回, 新たに次の事を見いだした. すなわち, 式 (39),(40) から分かるように, $\bar{\Phi}(\check{r}_l,\xi)$, $\bar{\Psi}(\check{z}_j,\xi)$ は

$$\bar{\Phi}\left(\frac{1}{r_l},\xi\right)=-\bar{\Phi}(r_l,\xi) \quad , \quad \bar{\Psi}\left(\frac{1}{z_j},\xi\right)=-\bar{\Psi}(z_j,\xi) \tag{45}$$

を満たす. 又, $\bar{\Psi}(z_j,\xi)$ と $\bar{\Psi}(z_{j+1},\xi)$ とは大きくは異ならない筈である. 従って, $\check{r}_l$, $\check{z}_j$ を , K が偶数のときには $r_1,{z_1}^{-1},z_2,{z_3}^{-1},\cdots$ のように交互にとり, K が奇数のときには

$z_1, z_2{}^{-1}, z_3, z_4{}^{-1}, \cdots$ と交互にとれば偏角の非線形成分を小さく出来る筈である. すなわち, $\tilde{r}_l$, $\tilde{z}_j$ を

$$\begin{cases} K = 4n & \text{のとき } r_1, \dfrac{1}{z_1}, z_2, \dfrac{1}{z_3}, \cdots, z_{J-1}, \dfrac{1}{z_J} \\ K = 4n+1 & \text{のとき } z_1, \dfrac{1}{z_2}, z_3, \dfrac{1}{z_4}, \cdots, z_{J-1}, \dfrac{1}{z_J} \\ K = 4n+2 & \text{のとき } r_1, \dfrac{1}{z_1}, z_2, \dfrac{1}{z_3}, \cdots, \dfrac{1}{z_{J-1}}, z_J \\ K = 4n+3 & \text{のとき } z_1, \dfrac{1}{z_2}, z_3, \dfrac{1}{z_4}, \cdots, \dfrac{1}{z_{J-1}}, z_J \end{cases} \tag{46}$$

ととれば最良とは行かないまでも偏角 $\arg m_0(\xi)$ の非線形成分を十分に小さく出来る筈である. この考えに基ずいて今回, $4 \le K \le 70$ について十分な桁数の Filter 係数を計算した. これを Lasylets(=Less ASYmmetric waveLETS filters) と呼ぶ事にする.

5. 整数点上における scaling 関数の値の計算.

scaling 関数や mother wavelet 関数のグラフ等を書くのに $\phi(k)$ $: 1 \le k \le 2K-2$ の値を要する. その他にも $\phi(k)$ の値を要する事があるのでこれらの値を十分な精度で計算した. 文献 [6],p.132 によれば, $\phi(k)$ の値は二つの関係式,

$$\phi(x) = 2\sum_{k=0}^{2K-1} c_k \phi(2x-k) \quad , \quad \sum_{k=0}^{2K-1} \phi(k) = 1 \tag{47}$$

を使って計算できる. すなわち, 上式の第一式に, $x = l$ $: 1 \le l \le 2K-2$ を代入すると, $2K-2$ 元の同次方程式

$$\begin{cases} \Gamma\phi = \dfrac{1}{2}\phi \quad : \quad \phi = (\phi(1), \phi(2), \cdots, \phi(2K-2))^T \\ \Gamma = (\gamma_{j,k}) \ : 1 \le j, k \le 2K-2 \quad ; \quad \gamma_{j,k} = \begin{cases} c_{2j-k} : 2j-2K+1 \le k \le 2j \ , \\ 0 : k \le 2j-2K \ , \ k \ge 2j+1 \end{cases} \end{cases} \tag{48}$$

を得る. これを逆反復法で解けば, $\phi(k)$ $: 1 \le k \le 2K-2$ を得る事が出来る.

参考文献 [1] Daubechies,I., Ten Lectures on Wavelets , CBMF-NSF ,(1992) . [2] Daubechies,I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets II. Variations on a theme, SIAM J. Math. Anal., 24, pp.499-519,(1993) . [3] Andrew Bruce, Hong-Ye Gao, Applied Wavelet Analysis with S-PLUS , Springer , New York , (1996). [4] Gilbert Strang and Truong Nguyen , Wavelets and Filter Banks , Wellesley-Cambridge Press , Wellesley , (1996). [5] Gilbert Strang , Wavelets from Filter Banks , *in* ITERATIVE METHODS IN SCIENTIFIC COMPUTING , Raymond H. Chan , Tony F. Chan and Gene H. Golub[Eds.] , Springer , Singapore , pp.59-110 , (1997) . [6] Charles K.Chui, An Introduction to Wavelets, Academic Press,Inc. ,(1992). [7] 秦野和郎, Wavelet Filter 係数の計算, 第 24 回数値解析シンポジュウム講演予稿集 (1995), pp.19-22.